ACAD ESCALE	**Examen national 2024** **La Correction**	Niveau: $2^{ème}$ *Année BAC PC* LA Session Normale
Année scolaire:2023-2024		**Prof : Khatim**

Matière	**Mathématiques**	**Durée**	**3 heures**
Branche	**Sciences Physiques Option française**	**Coefficient**	**7**

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le Candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de Quatre exercices et un problème indépendants entre eux répartis suivant Les domaines Comme suit

Exercice 1	Suites Numériques	3 Points
Exercice 2	Géométrie Dans l'espace	3 Points
Exercice 3	Nombres Complexes	4 Points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2 Points
Problème	Etude de fonctions numériques et Calcul d'intégral	8 Points

- On Désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- Ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1

On Considère la suite (U_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1+u_n}$ pour tout entier naturel n

0,25	1. a - Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$ pour tout naturel n
0,5	b - Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout naturel n
0,25	2. a - Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$ pour tout naturel n
0.5	b - Montrer que la suite (u_n)Est décroissante Et en Déduire que (u_n)Est Convergente
0,5	3. Soit(V_n) la suite numérique définie par : $v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n}$ pour tout naturel n a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$
0, 5	b- Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$ pour tout naturel n
0,5	c- Calculer la limite de la suite (U_n)

Exercice 2

Dans l'espace muni d''un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$,
On considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ Et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

0,25	1. Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ une équation cartésienne de (P)
0.25 P	2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
0.5 P	3. a - vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P)) = 3$
0.5 P	b - En Déduire que le plan (P) coupe la sphére (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer
0.5 P	4. a - déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et Perpendiculaire au plan (P)
0.5 P	b - Montrons que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)
0.5 P	C - Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 3

Dans le plan complexe, muni au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3}(1-i)$ et $b = 2+\sqrt{3}+i$

0.5 P — 1. Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et $arg(a) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

0.75 P — 2. a - Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ Puis Vérifier que : $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.75 P — b - En déduire une forme trigonométrique du complexe b Puis Vérifier que b^{24} est un nombre réel

3. Soit R la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affice z en un point M'd'affixe z'. On pose $R(B) = B$. $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$

0.5 P — a) Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$ et que $arg(a') \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]$ ou a' est l'affixe du point A'

0.5 P — b) Montrer que l'affixe du points A'' est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés.

0.5 P — c) Montrer que b' l'affixe du point B' vérifier $b' = (\frac{3+\sqrt{3}}{3})\bar{a}$

0.5 P — d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4

Une Urne Contient sept boules quatre boules portant le numéro 1 ; deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3 Toutes les boules sont indiscernables au toucher

On Tire Simultanément Au Hasard deux boules de l'urne

0.5 P — 1) Montrer que $(A) = \frac{1}{3}$, ou A est l'évènement : Les Deux boules tirées portent le même numéro

0.5 P — 2) Montrer que $(B) = \frac{5}{21}$, ou B est l'évènement : La Somme des numéros des boules tirées est 4

0.5 P — 3) Calculer $P(A \cap B)$

0.5 P — 4) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier

Problème 8 points

Première 1 :

On Considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

0.5 P — 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v

0.25 P — 2) Justifier Graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 P — 3) Calculer l'aire de la partie délimitée par la courbe (C_u) et (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Première 2 :

On Considère la fonction f définie par $f(x) = x + 1 - ln(e^x - x)$

0.25 P — 1) a - Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$

0.5 P — b - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 1 - ln(1 - xe^{-x})$

0.5 P — c - En Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ puis interpréter géométriquement ce résultat

0.25 P — 2) a - Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

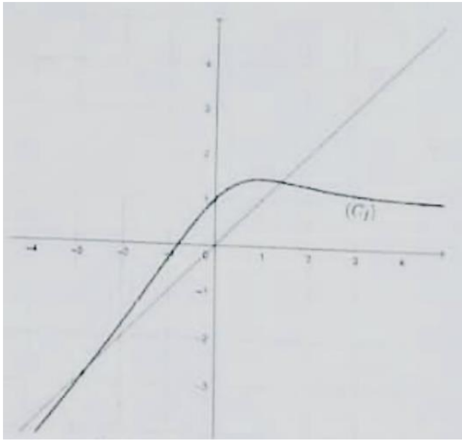
0.5 P — b - Vérifier que pour tout $x < 0$ $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$

0.75 P — c - Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ Puis Déduire que la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

0.5 P — 3) a - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$

0.5 P — b - Etudier le signe de la fonction dérivée $'$, puis Déduire le Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0.75 P — c - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1; 0[$



4) La Courbe (Cf) Ci-Contre est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé

0.5 P — a - Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions $\propto$ et β

0.5 P — b - Montrer que $e^{\propto} - e^{\beta} = \propto - \beta$

5) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 1]$

0.5 P — a - Montrer que la fonction g admet une fonction Réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on Déterminera (il n'est pas Demandé de déterminer$g^{-1}(x)$)

0.75 P — b - Vérifier que g^{-1} est Dérivable en 1 et Calculer $(g^{-1})'(1)$

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1+u_n} (n \in IN) \end{cases}$

1. a) Vérifions que $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$ pour tout n de IN

Soit n de IN

on a : $4 - \frac{6}{1+u_n} = \frac{4(1+u_n)-6}{1+u_n} = \frac{4+4u_n-6}{1+u_n} = \frac{4u_n-2}{1+u_n} = u_{n+1}$

Alors $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$ pour tout n de IN

b) Montrons par récurrence que pour tout n de IN on : $2 \leq u_n \leq 4$

Pour $n = 0$

on a : $2 \leq u_0 = 4 \leq 4$

Alors la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On Suppose que $2 \leq u_n \leq 4$

Et On Montrer que $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

On a $2 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 3 \leq 1 + u_n \leq 5$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{6}{5} \leq \frac{6}{1+u_n} \leq \frac{6}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{6}{5} \leq \frac{6}{1+u_n} \leq 2$$
$$\Rightarrow -2 \leq -\frac{6}{1+u_n} \leq -\frac{6}{5}$$
$$\Rightarrow 2 \leq 4 - \frac{6}{1+u_n} \leq \frac{14}{5}$$
$$\Rightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq 4 \text{ car } \frac{14}{5} \leq 4$$

Donc d'âpres le principe de récurrence on a : $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n de IN.

2. a) Montrons que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$ pour tout n de IN.

Soit n de IN. on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n-2}{1+u_n} - u_n$$
$$= \frac{4u_n-2-u_n(1+u_n)}{1+u_n}$$
$$= \frac{4u_n-2-u_n-u_n^2}{1+u_n}$$
$$= \frac{2u_n-2+u_n-u_n^2}{1+u_n}$$
$$= \frac{2(u_n-1)-u_n(u_n-1)}{1+u_n}$$
$$= \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$$

Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$ pour tout n de IN.

b) Montrons que la suite (u_n)Est décroissante Et Déduisons qu'elle est convergente

Pour tout n de IN on a : $2 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} u_n - 1 \geq 1 > 0 \\ 2 - u_n \leq 0 \\ 1 + u_n \geq 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n} \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

Alors la suite (u_n) est décroissante

la suite (u_n) est décroissante et elle est minorée par 2 alors elle est convergente

Donc la suite (u_n) est décroissante et convergente

3. Pour tout $n \in IN$ on pose : $v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n}$

a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

Pour tout n de IN on a $v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n}$

Alors $v_{n+1} = \frac{2-U_{n+1}}{1-U_{n+1}} = \frac{2-\frac{4u_n-2}{1+u_n}}{1-\frac{4u_n-2}{1+u_n}} = \frac{\frac{2+2u_n-4u_n+2}{1+u_n}}{\frac{1+u_n-4u_n+2}{1+u_n}} = \frac{4-2u_n}{3-3u_n} = \frac{2}{3} \times \frac{2-u_n}{1-u_n} = \frac{2}{3} \times v_n$

D'où $v_{n+1} = \frac{2}{3} \times v_n$ pour tout entier naturel n

Alors (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b- Montrons que $u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$ pour tout n de IN

Déterminons v_n en fonction de n pour tout n de IN

On a : (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2-u_0}{1-u_0} = \frac{2-4}{1-4} = \frac{2}{3}$

Alors que pour tout n de IN on $v_n = v_0 . q^n = \frac{2}{3} . \left(\frac{2}{3}\right)^n$ Donc $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Et Pour tout n de IN on a :

$V_n = \frac{2-u_n}{1-u_n} \Rightarrow v_n(1-u_n) = 2 - u_n$

$\Rightarrow v_n - v_n u_n = 2 - u_n$

$\Rightarrow u_n - v_n u_n = 2 - v_n$

$\Rightarrow u_n(1-v_n) = 2 - v_n$

$\Rightarrow u_n = \frac{2-v_n}{1-v_n}$

Alors $u_n = \frac{1+(1-v_n)}{1-v_n}$ d'où $u_n = \frac{1}{1-v_n} + \frac{1-v_n}{1-v_n}$

Donc $u_n = \frac{1}{1-v_n} + 1$

OR $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ Alors $u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$ pour tout n de IN

D'où $u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$ pour tout n de IN

c- Calculons $\lim u_n$

on a $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \lim \frac{2}{3} . \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{2}{3} < 1$) alors $\lim \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = 1$ d'où $\lim u_n = 2$

Alors $\lim u_n = 2$

Exercice 2

Dans l'espace muni d''un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$,
On considère les points $(-1,0,-1)$, $B(1,2,-1)$, et le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$
Et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

1. **Montrer que $2x-2y+z+3=0$ une équation cartésienne de (P)**

on a $\vec{n}(2,-2,1)$ vecteur normal du plan (P)
Alors une equation de (P) est : $2x-2y+z+d=0$ (tel que $d\epsilon IR$)
Déterminons la valeur de d
On a $A\epsilon(P)$
Alors $2x_A-2y_A+z_A+d=0$ D'où $d=-2\times(-1)+2\times 0-(-1)=3$
D'où $2x-2y+z+3=0$ une équation cartésienne de (P)

Alors $2x-2y+z+3=0$ une équation cartésienne de (P)

2. **Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S)**

On a la sphère (S) est de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5
on a : $M(x,y,z)\epsilon(S) \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=5^2$
$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2=25$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$

Alors $x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$ une équation cartésienne de la sphère (S)

3. **a) vérifions que $d(\Omega,(P))=3$**

on a : $(\mathrm{P}): 2\mathrm{x}-2\mathrm{y}+\mathrm{z}+3=0$ Et $\Omega(2,-1,0)$
D'où $d(\Omega,(\mathrm{P}))=\frac{|2x_\Omega-2y_\Omega+z_\Omega+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|2\times2-2\times(-1)+0+3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|9|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$

Alors $d(\Omega,(P))=3$

b) déduisons que le plan (P) coupe la sphére (S) suivant un cercle (Γ)

On a $d(\Omega,(P))=3$ et $R=5$
Alors $d(\Omega,(P))<R$
Donc le plan (P) coupe la sphére (S) suivant un cercle (Γ)
Déterminons le rayon r du cercle (Γ)
On a $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ alors $r=4$

Alors le plan (P) coupe la sphére (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r=4$

4. a) déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonal au plan (P)

On a : $(\Delta) \perp (P)$ donc le vecteur $\vec{n}(2,-2,1)$ normal au plan (P) est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Et On a aussi (Δ) passe par Ω

Alors une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x = x_\Omega + x_{\vec{n}}t \\ y = y_\Omega + y_{\vec{n}}t \ ;(t\epsilon IR) \\ z = z_\Omega + z_{\vec{n}}t \end{cases}$

D'où (Δ) : $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-2t \ ;(t\epsilon IR) \\ z = t \end{cases}$

Donc (Δ) $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-2t \ ;(t\epsilon IR) \\ z = t \end{cases}$ une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b) Montrons que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)

Donc on doit montrer que H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P)

C'est-à-dire On doit vérifier que H est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (P)

On a (Δ) : $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-2t \ ;(t\epsilon IR) \\ z = t \end{cases}$

Et $(P): 2x-2y+z+3=0$

D'où $2(2+2t)-2(-1-2t)+t+3=0$

Alors $4+4t+2+4t+t+3=0$

Donc $9t+9=0$

Alors $t=-1$

D'où $\begin{cases} x = 2+2t = 2+2\times(-1) = 0 \\ y = -1-2t = -1-2\times(-1) = 1 \\ z = t = -1 \end{cases}$

Alors $H(0;1;-1)$ est est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (P)

Donc le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)

C - Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

On a la doite (Δ) a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(2,-2,1)$

Et on a $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\times2-2\times2+1\times0 = 4-4+0 = 0$

Alors $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ Donc $(\Delta) \perp (AB)$

Et on a le milieu du segment $[AB]$ est le point de coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right) = (2;-2;1) = H$

Or $H \in (\Delta)$

Alors la droite (Δ) est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par le milieu du segment $[AB]$

D'où la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 3

Dans le plan complexe, muni au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points $A(a), B(b)$, tels que : $a = \sqrt{3}(1-i)$, $b = 2+\sqrt{3}+i$

1. **Vérifions que $|a| = \sqrt{6}$ et $arg(a) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$**

On a $a = \sqrt{3}(1-i) = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

D'où $|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$

Donc $a = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

$$= \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}i\right)$$

$$= \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \sqrt{6}\left(Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{6}\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + iSin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Alors $a = \sqrt{6}\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + iSin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

D'où $|a| = \sqrt{6}$ et $arg(a) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2. **a) Montrons que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$**

on a : $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}+2+i}{\sqrt{3}(1-i)}$

$$= \frac{(\sqrt{3}+2+i)(1+i)}{\sqrt{3}(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+2+i)(1+i)}{\sqrt{3}(1^2+1^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}+2+2i+i-1}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3i}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i$$

D'où $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$

Donc $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$

- **Vérifions que : $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$**

On a : $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Alors : $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

b - En déduire une forme trigonométrique du complexe b

on a $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$

Alors $b = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \times a$

OR $a = \sqrt{6}\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + iSin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ D'où $a = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $b = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $b = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{6}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

Alors $b = (\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

Donc $b = (\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Alors $b = (\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

- **Déduisons que $b^{24} \epsilon \mathbb{R}$**

On a : $b^{24} = \left((\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)^{24}$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}\left(cos\left(24 \times \frac{\pi}{12}\right) + isin\left(24 \times \frac{\pi}{12}\right)\right)$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}(cos(2\pi) + isin(2\pi))$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}(1 + i \times 0)$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24} \in \mathbb{R}$

Alors $b^{24} \epsilon \mathbb{R}$

Donc $b^{24} \epsilon \mathbb{R}$

3. **Soit R la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affice z en un point M'd'affixe z'. On pose $R(B) = B$. $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$**

a) Vérifions que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$ et que $arg(a') \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]$ ou a' est l'affixe du point A'

On a : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_O)$

$\Leftrightarrow z' = (cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin(\frac{\pi}{6}) \times z$

$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) z$

$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$

D'où $\boldsymbol{z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z}$

- **Vérifions que $arg(a') \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]$**

On a : $R(A) = A' \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times a$

$\Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow a' = \sqrt{6}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\Leftrightarrow a' = \sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

$\Leftrightarrow a' = \sqrt{6}\left(Cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + iSin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Donc $a' = \sqrt{6}\left(Cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + iSin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

D'où $arg(a') \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]$

b) Montrons que $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés.

On a : $R(A') = A'' \Leftrightarrow a'' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times a'$

$\Leftrightarrow a'' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \times a$

$\Leftrightarrow a'' = e^{i\frac{2\pi}{6}} \times \sqrt{6}e^{-\frac{i\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$

Alors $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$

- **Déduisons que les points O, A'' et B sont alignés.**

On a $\frac{b-z_O}{a''-z_O} = \frac{b}{a''}$

$= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{3} \in \mathbb{R}$

D'où $\frac{b-z_O}{a''-z_O} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \in \mathbb{R}$

Alors les points$O$, A'' et B sont alignés.

Donc les points $O; A''$ et B Sont alignés

c) Montrons que $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}$

On a : $R(B) = B' \Leftrightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times b$

$\Leftrightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times (\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\Leftrightarrow b' = (\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ (2)

et on a : $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (Car : $a = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ D'où $\overline{a} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$)

Alors : $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ (1)

D'âpres (1) et (2) on Déduit que $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}$

Alors $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}$

d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O

On a
$$\frac{b'-z_O}{a-z_O} = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}}{a} = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc $arg\left(\frac{b'-z_O}{a-z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où le triangle OAB' est rectangle en O

Donc le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4 (2 points)

Une Urne Contient sept boules :quatre boules portant le numéro 1 ; deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3 Toutes les boules sont indiscernables au toucher On Tire Simultanément Au Hasard deux boules de l'urne

1) Montrer que $(A) = \frac{1}{3}$, ou A est l'évènement : Les Deux boules tirées portent le même numéro

On a $A = \{11 \; ; 22\}$

Alors $P(A) = \frac{C_4^2 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{6+1}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

D'où $P(A) = \frac{1}{3}$

2) Montrer que $(B) = \frac{5}{21}$, ou B est l'évènement : La Somme des numéros des boules tirées est 4

On a $B = \{13 \; ; 22\}$

Alors $P(B) = \frac{C_4^1 \times C_1^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{4\times1+1}{21} = \frac{5}{21}$

D'où $P(B) = \frac{5}{21}$

3) Calculer $P(A \cap B)$

On a $A \cap B = \{22\}$

Alors $P(A \cap B) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$

D'où $P(A \cap B) = \frac{1}{21}$

4) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier

On a $P(A \cap B) = \frac{1}{21}$

Et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{21} = \frac{5}{63}$

D'où $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

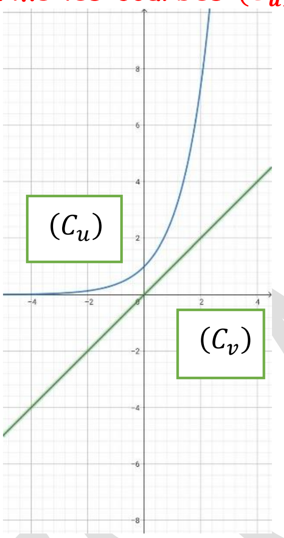
Alors les évènements A et B ne sont pas indépendants

Problème

Première 1 :

On Considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v



2) Justifier Graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

On a la courbe de la fonction u est située strictement au-Dessus de la courbe de la fonction v sur $\mathbb{R}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\ ; u(x) > v(x)$ Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ; u(x) - v(x) > 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\ ; e^x - x > 0$

Alors $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

3) Calculer l'aire de la partie délimitée par la courbe (C_u) et (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

On a
$$\begin{aligned}
A &= \left(\int_0^1 |u(x) - v(x)|\, dx\right).ua \\
&= \left(\int_0^1 |e^x - x|\, dx\right).ua \\
&= \left(\int_0^1 e^x - x\, dx\right).ua \qquad \text{Car } \forall x \in \mathbb{R}\ ; e^x - x > 0 \text{ D'où } \forall x \in \mathbb{R}\ ; |e^x - x| = e^x - x \\
&= \left(\int_0^1 \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)' dx\right).ua \\
&= \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \times\ ua \\
&= \left[\left(e^1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(e^0 - \frac{0^2}{2}\right)\right] \times\ ua \\
&= \left[\left(e - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{0}{2}\right)\right] \times\ ua \\
&= \left(e - \frac{1}{2} - 1\right) \times\ ua \\
&= \left(e - \frac{3}{2}\right) \times\ ua
\end{aligned}$$

Alors l'aire de la partie délimitée par la courbe (C_u) et (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est $A = \left(e - \frac{3}{2}\right) \times\ ua$

Partie 2 :

On Considère la fonction f définie par $f(x) = x + 1 - ln(e^x - x)$

1) a – Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$

On a $D_f = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ e^x - x > 0\}$

$= \mathbb{R}$ Car $\forall x \in \mathbb{R}\ ; e^x - x > 0$

D'où f est défini sur $\mathbb{R}$

b – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 1 - ln(1 - xe^{-x})$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $1 - ln(1 - xe^{-x}) = 1 - ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$

$= 1 - ln\left(\frac{e^x - x}{e^x}\right)$

$= 1 - (ln(e^x - x) - lne^x)$

$= 1 - (ln(e^x - x) - x)$

$= 1 - ln(e^x - x) + x$

$= x + 1 - ln(e^x - x)$

$= f(x)$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 1 - ln(1 - xe^{-x})$

c – En Déduire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ puis interpréter géométriquement ce résultat

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - ln(1 - xe^{-x})$

$= 1$

Car $\lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{X \to -\infty} Xe^X = 0$; On a posé $X = -x$ Or $x \to +\infty$ Alors $X \to -\infty$

D'où $\lim_{x \to +\infty} 1 - xe^{-x} = 1$ D'où $\lim_{x \to +\infty} ln(1 - xe^{-x}) = ln1 = 0$ Car ln est Continue en 1

Donc $\lim_{x \to +\infty} 1 - ln(1 - xe^{-x}) = 1$

Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

IG : La Courbe (Cf) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$

2) a – Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

On a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - ln(1 - xe^{-x})$

$= -\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ et \\ \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$ $\lim_{x \to -\infty} -xe^{-x} = +\infty$

D'où $\lim_{x \to -\infty} 1 - xe^{-x} = +\infty$ Donc $\lim_{x \to -\infty} ln(1 - xe^{-x}) = +\infty$ Alors $\lim_{x \to -\infty} 1 - ln(1 - xe^{-x}) = -\infty$

D'où $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b - Vérifier que pour tout $x<0$ $f(x)=x+1-\ln(-x)-ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$

Soit $x<0$

On a $x+1-\ln(-x)-ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)=x+1-\left(\ln(-x)+ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)\right)$

$=x+1-\left(\ln\left(-x\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)\right)\right)$

$=x+1-\left(\ln\left(-x+\frac{x}{xe^{-x}}\right)\right)$

$=x+1-\left(\ln\left(-x+\frac{1}{e^{-x}}\right)\right)$

$=x+1-(\ln(-x+e^{x}))$

$=x+1-ln(e^{x}-x)$

$=f(x)$

D'où pour tout $x<0$ $f(x)=x+1-\ln(-x)-ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$

c - Calculer $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ Puis Déduire que la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

On a $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-\ln(-x)-ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}+\frac{1}{x}-\frac{\ln(-x)}{x}-\frac{ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{-x}-\frac{ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$

$=1$

Car $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ Et $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{-x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X}=0$ Car On a Posé $X=-x$ OR $x\to-\infty$ Alors $X\to+\infty$

Et on a $\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$ D'où $\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{xe^{-x}}=1$ Alors $\lim_{x\to-\infty}ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)=\ln(1)=0$ Car la fonction ln est Continue en 1

Or $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ Alors $\lim_{x\to-\infty}\frac{ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}=0$

D'où $\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{-x}-\frac{ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$

Alors $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

Donc $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

Et on a $\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}x+1-\ln(-x)-ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)-x$

$=\lim_{x\to-\infty}1-\ln(-x)-ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$

$=-\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$ D'où $\lim_{x\to-\infty}\ln(-x)=+\infty$ Alors $\lim_{x\to-\infty}-\ln(-x)=-\infty$

Et on a $\lim_{x\to-\infty}ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)=0$ D'où $\lim_{x\to-\infty}1-\ln(-x)-ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)=-\infty$

Donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=-\infty$

IG : LA Courbe (Cf) admet une Branche parabolique dirigée vers la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

3) a – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $f'(x) = \left(x + 1 - ln(e^x - x)\right)'$

$= (x)' + (1)' - \left(ln(e^x - x)\right)'$

$= 1 + 0 - \frac{(e^x - x)'}{e^x - x}$

$= 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

$= \frac{e^x - x - e^x + 1}{e^x - x}$

$= \frac{1-x}{e^x - x}$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$

b – Etudier le signe de la fonction dérivée ′ , puis Déduire le Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

On a $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Et On a d'après la question 2 de la première partie : $e^x - x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$

OR $1 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$; D'où

	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	1

c – Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1; 0[$

On a la fonction f est Continue et Strictement Monotone (Croissante) sur l'intervalle $]-1; 0[$

Et on a $f(-1) \times f(0) < 0$

Car $f(-1) = -1 + 1 - ln(e^{-1} + 1) = -ln(e^{-1} + 1)$

Or $e^{-1} > 0$ D'où $e^{-1} + 1 > 1$ Alors $ln(e^{-1} + 1) > 0$ Alors $-ln(e^{-1} + 1) < 0$

D'où $f(-1) < 0$

Et on a $f(0) = 0 + 1 - ln(e^0 + 0) = 1 - ln(1) = 1$

D'où $f(0) > 0$

Alors $f(-1) \times f(0) < 0$

D'où D'après le Théorème des Valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1; 0[$

4) La Courbe (Cf) Ci-Contre est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé

a - Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions $\propto$ et β

On a la courbe (Cf) et la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice) se Coupent en deux ponts distincts d'abscisses $\propto$ et β

Alors l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions $\propto$ et β

b - Montrer que $e^{\propto} - e^{\beta} = \propto - \beta$

On a $\propto$ et β Sont deux solutions de l'équation $f(x) = x$

D'où $f(\propto) = \propto$ et $f(\beta) = \beta$ D'où $f(\propto) - f(\beta) = \propto - \beta$

Alors $\propto + 1 - ln(e^{\propto} - \propto) - \beta - 1 + ln(e^{\beta} - \beta) = \propto - \beta$

D'où $ln(e^{\beta} - \beta) - ln(e^{\propto} - \propto) = \propto - \beta - \propto + \beta$

Donc $ln(e^{\beta} - \beta) - ln(e^{\propto} - \propto) = 0$

Alors $ln(e^{\propto} - \propto) = ln(e^{\beta} - \beta)$

D'où $e^{\propto} - e^{\beta} = \propto - \beta$

Alors $e^{\propto} - e^{\beta} = \propto - \beta$

5) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 1]$

a - Montrer que la fonction g admet une fonction Réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on Déterminera (il n'est pas Demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

On a la fonction g est Continue et Strictement Monotone (Croissante) sur l'intervalle $I =]-\infty; 1]$

(Car g est la réstriction de f sur cet intervalle I)

Et on a $J = g(I) = f(I) = f(]-\infty; 1]) = \left]\lim_{x \to -\infty} f(x) ; f(1)\right] =]-\infty; 2 - ln(e-1)]$

Alors la fonction g admet une fonction Réciproque g^{-1} définie sur un intervalle $J =]-\infty; 2 - ln(e-1)]$

b - Vérifier que g^{-1} est Dérivable en 1 et Calculer $(g^{-1})'(1)$

On a $f(0) = 1$ D'où $g(0) = 1$ Alors $g^{-1}(1) = 0$

Et on Sait que la fonction g est Dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 1]$

D'où g est Dérivable en $g^{-1}(1) = 0$ Car $0 \in]-\infty; 1]$

Et on a $g'(g^{-1}(1)) = g'(0) = f'(0) = \frac{1-0}{e^0 - 0} = 1$

D'où $g'(g^{-1}(1)) \neq 0$

Alors g^{-1} est Dérivable en 1

Et $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{1} = 1$

D'où g^{-1} est Dérivable en 1 et $(g^{-1})'(1) = 1$