| ACAD'ESCALE L'approche individualisée par excellence ! | **Examen national 2024 SN** « **Correction** » | **Matière : Maths** **Niveau : 2ème Bac.éco** |
|---|---|---|

## INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ Répondre aux questions avec précision et soin.
- ✓ Répondre aux exercices selon l'ordre qui vous convient.
- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices et un problème :

- ✓ Exercice 1 : Suites numériques ………………………………………………5 points
- ✓ Exercice 2 : Calcul de probabilités ……………………………………………3 points
- ✓ Exercice 3 : Etude d'une fonction numérique ………………………………8 points
- ✓ Exercice 4 : Calcul intégral ……………………………………………………4 points

## Exercice 1 :(5pts)

Soit $(U_n)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n - 1 \end{cases}$ ; $\forall(n \in \mathbb{N})$

1. Calculer $U_1$ et $U_2$

On a: $U_1 = \frac{2}{5}U_0 - 1 = \frac{2}{5} \times 5 - 1 = \mathbf{1}$

$U_2 = \frac{2}{5}U_1 - 1 = \frac{2}{5} \times 1 - 1 = \frac{-3}{5}$

Alors $U_1 = 1$ et $U_2 = \frac{-3}{5}$

2. a. Montrer par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$: $U_n > -\frac{5}{3}$

Initialisation :

Pour n=0 on a :

$U_0 > -\frac{5}{3}$

$5 > -\frac{5}{3}$ est vraie

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $U_n > -\frac{5}{3}$

Montrons que : $U_{n+1} > -\frac{5}{3}$

On a :

$$U_n > -\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{2}{5}U_n > \frac{2}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow \frac{2}{5}U_n - 1 > \frac{-2}{3} - 1 \Rightarrow U_{n+1} > -\frac{5}{3}$$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, Alors pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on a : $U_n > -\frac{5}{3}$

b. Vérifier que $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{5}(U_n + \frac{5}{3})$, puis déduire que $(U_n)$ est une suite décroissante.

Soit $n$ de $\mathbb{N}$ on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{5}U_n - 1 - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{5}U_n - 1 - \frac{5}{5}U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3}{5}U_n - 1$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3}{5}(U_n - 1 \times (\frac{-5}{3}))$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3}{5}(U_n + \frac{5}{3})$$

En Déduire que La suite $(U_n)$ est décroissante.

$$U_n > -\frac{5}{3} \Leftrightarrow U_n + \frac{5}{3} > -\frac{5}{3} + \frac{5}{3} \Leftrightarrow U_n + \frac{5}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{5}(U_n + \frac{5}{3}) < 0 \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n < 0$$

Donc $(U_n)$ est une suite décroissante.

c. Dire pourquoi la suite $(U_n)$ est convergente.

Puisque $(U_n)$ est minorée par$(-\frac{5}{3})$ et décroissante,

Alors elle est convergente.

3. On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}$: $\boldsymbol{V_n = U_n + \frac{5}{3}}$

a. Montrer que la suite $(\boldsymbol{V_n})$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

On a : $V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{5}{3}$

$V_{n+1} = \frac{2}{5}U_n - 1 + \frac{5}{3}$

$V_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + \frac{2}{3}$

$V_{n+1} = \frac{2}{5}(U_n + \frac{2}{3} \times \frac{5}{2})$

$V_{n+1} = \frac{2}{5}(U_n + \frac{5}{3})$

$V_{n+1} = \frac{2}{5}V_n$

Donc $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

b. Calculer $V_0$

On a : $V_0 = U_0 + \frac{5}{3} = 5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$

Donc $V_0 = \frac{20}{3}$

c. Donner l'expression de $V_n$ en fonction de $n$.

On sait que : $V_n = V_0 \times q^n$

Donc $V_n = \frac{20}{3} \times (\frac{2}{5})^n$

d. En Déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $\boldsymbol{U_n = \frac{20}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{5}{3}}$.

Soit n de $\mathbb{N}$,

On a : $V_n = U_n + \frac{5}{3}$

Donc $U_n = V_n - \frac{5}{3}$

Alors $U_n = \frac{20}{3} \times (\frac{2}{5})^n - \frac{5}{3}$

e. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

On a : $-1 < \frac{2}{5} < 1$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{5})^n = 0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\frac{5}{3}$.

## Exercice 2 :(3pts)

Une urne contient **trois** boules vertes numérotées **1 ;2 ;3**, **trois** boules rouges numérotées **1 ;2 ;3** et **trois** boules blanches numérotées **1 ;2 ;2** (Les neuf boules sont **indiscernables au toucher**).

**On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.**

On considère les événements suivants :

A : « **Les trois boules tirées portent le même numéro** »

B : « **Les trois boules tirées sont de couleurs deux à deux différentes** »

1. Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$

L'univers associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des combinaisons de 3 boules parmi les 9 boules contenues dans l'urne.

Donc le nombre des issues possible est : card($\Omega$)= $C_9^3 = 84$.

Calculons p(A) :

L'événement A est réalisé lorsqu'on tire 3 boules portent le même numéro.

Donc card(A)$= C_3^3 + C_4^3 = 5$

Par suite p(A)$=\frac{\text{card(A)}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{84}$

2. Calculer $p(B)$

L'événement B est réalisé lorsqu'on tire 3 boules de couleurs deux à deux différentes.

Donc card(B)$= C_3^1 \times C_3^1 \times C_3^1 = 27$

Par suite p(B)$=\frac{\text{card(B)}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{27}{84} = \frac{9}{28}$

3. Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{28}$

L'événement A∩B est réalisé lorsqu'on tire 3 boules portent le même numéro et de couleurs deux à deux différentes.

Donc card(A∩B)$=C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 = 3$

Par suite p(A∩B)$=\frac{\text{card(A∩B)}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}$

4. En déduire $p(A \cup B)$

On sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$= \frac{5}{84} + \frac{27}{84} - \frac{3}{84}$

Donc $p(A \cup B) = \frac{29}{84}$

## Exercice 3 :(8pts)

Soit $h$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $D = ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{lnx + 1}{lnx - 1}}$$

1. a. En remarquant que pour tout $x \neq 1$, $h(x) = \frac{1+\frac{1}{lnx}}{1-\frac{1}{lnx}}$, montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = 1$ et que

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1.$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1+\frac{1}{lnx}}{1-\frac{1}{lnx}} = \frac{1}{1} = 1$

(car : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} lnx = -\infty$ et par suite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{lnx} = 0$)

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{lnx}}{1-\frac{1}{lnx}} = \frac{1}{1} = 1$

(car : $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{lnx} = 0$)

b. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} h(x) = +\infty$.

$lnx - 1 = 0 \Leftrightarrow lnx = 1 \Leftrightarrow x = e$

$lnx - 1 \geq 0 \Leftrightarrow lnx \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $lnx$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- On a $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} \frac{lnx+1}{lnx-1}$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} lnx + 1 = lne + 1 = 1 + 1 = 2$

Et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} lnx - 1 = lne - 1 = 1 - 1 = 0^-$

Alors $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} h(x) = -\infty$

- On a $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{lnx+1}{lnx-1}$

  Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} lnx + 1 = lne + 1 = 1 + 1 = 2$

  Et $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} lnx - 1 = lne - 1 = 1 - 1 = 0^+$

  Alors $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} h(x) = +\infty$

2. a. Montrer que pour tout $x$ de $D$: $h'(x) = \frac{-2}{x(lnx-1)^2}$

$h$ est une fonction dérivable sur $D$

Soit $x \in D$

On a : $h'(x) = \left(\frac{lnx+1}{lnx-1}\right)'$

$$= \frac{(lnx+1)'(lnx-1)-(lnx+1)(lnx-1)'}{(lnx-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(lnx-1)-(lnx+1)\frac{1}{x}}{(lnx-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}lnx-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}lnx-\frac{1}{x}}{(lnx-1)^2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{x}}{(lnx-1)^2}$$

Donc $h'(x) = \frac{-2}{x(lnx-1)^2}$

b. Calculer $h(\frac{1}{e})$ et donner le signe $h'(x)$, puis dresser le tableau de variations de $h$.

On a $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{ln\frac{1}{e}+1}{ln\frac{1}{e}-1} = \frac{-lne+1}{-lne-1} = \frac{-1+1}{-1-1} = 0$

<u>Etudions le signe de $h'(x)$</u>

Pour tout $x$ de $D$, on a : $(lnx-1)^2 > 0$ et $x$ est strictement positif

Et puisque $-2 < 0$

Alors $h'(x) < 0$

<u>Tableau de variations de $h$ :</u>

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{e}$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | | ‖ | $-$ | |
| $h$ | $1$ ↘ | $0$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $1$ |

c. Déterminer, à l'aide du tableau de variations :

i. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $h(x) \leq 0$.

D'après le tableau de variations, l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \leq 0$ est :

$S = [\frac{1}{e}; e[$

ii. L'image de l'intervalle $]0; e[$ par la fonction $h$.

D'après le tableau de variations, l'image de l'intervalle $]0; e[$ par la fonction $h$ est :

$h(]0; e[) = ]\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x < e}} h(x) ; \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) [$ (car $h$ est décroissante sur $]0; e[$)

$h(]0; e[) = ] -\infty; 1[$.

## Exercice 4 :(4pts)

On considère les fonctions numériques $\boldsymbol{f}$ est $\boldsymbol{g}$ de la variable réelle $\boldsymbol{x}$ définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $]\mathbf{0}; +\infty[$ par : $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$ et $\boldsymbol{g(x) = lnx}$.

1. Calculer $g(1), f(1)$ et $f(3)$.

On a $g(1) = ln1 = 0$

Et $f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = -3 + 3 = 0$

Et $f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$

Donc $f(1) = f(3) = 0$

2. Ci-dessous $(C_f)$ et $(C_g)$ sont les courbes représentatives respectives de $f$ et $g$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

a. Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^2 lnx\, dx = 2ln2 - 1$.

On pose $u(x) = lnx$ et $v'(x) = 1$

Donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$

Alors $\int_1^2 lnx\, dx = [xlnx]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times x\, dx$

$= [xlnx]_1^2 - \int_1^2 1\, dx$

$= [xlnx]_1^2 - [x]_1^2$

$= 2ln2 - 1ln1 - 2 + 1$

$\int_1^2 lnx\, dx = 2\ln 2 - 1$

b. Calculer $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3)\, dx$.

On a $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3)\, dx = [\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x]_1^2$

$= \left(\frac{1}{3} \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2\right) - \left(\frac{1}{3} \times 1^3 - 2 \times 1^2 + 3 \times 1\right)$

$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3}$

$\int_1^2 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \frac{-2}{3}$

c. En déduire que l'aire de la partie hachurée est égale à $\left(2ln2 - \frac{1}{3}\right) u.a.$

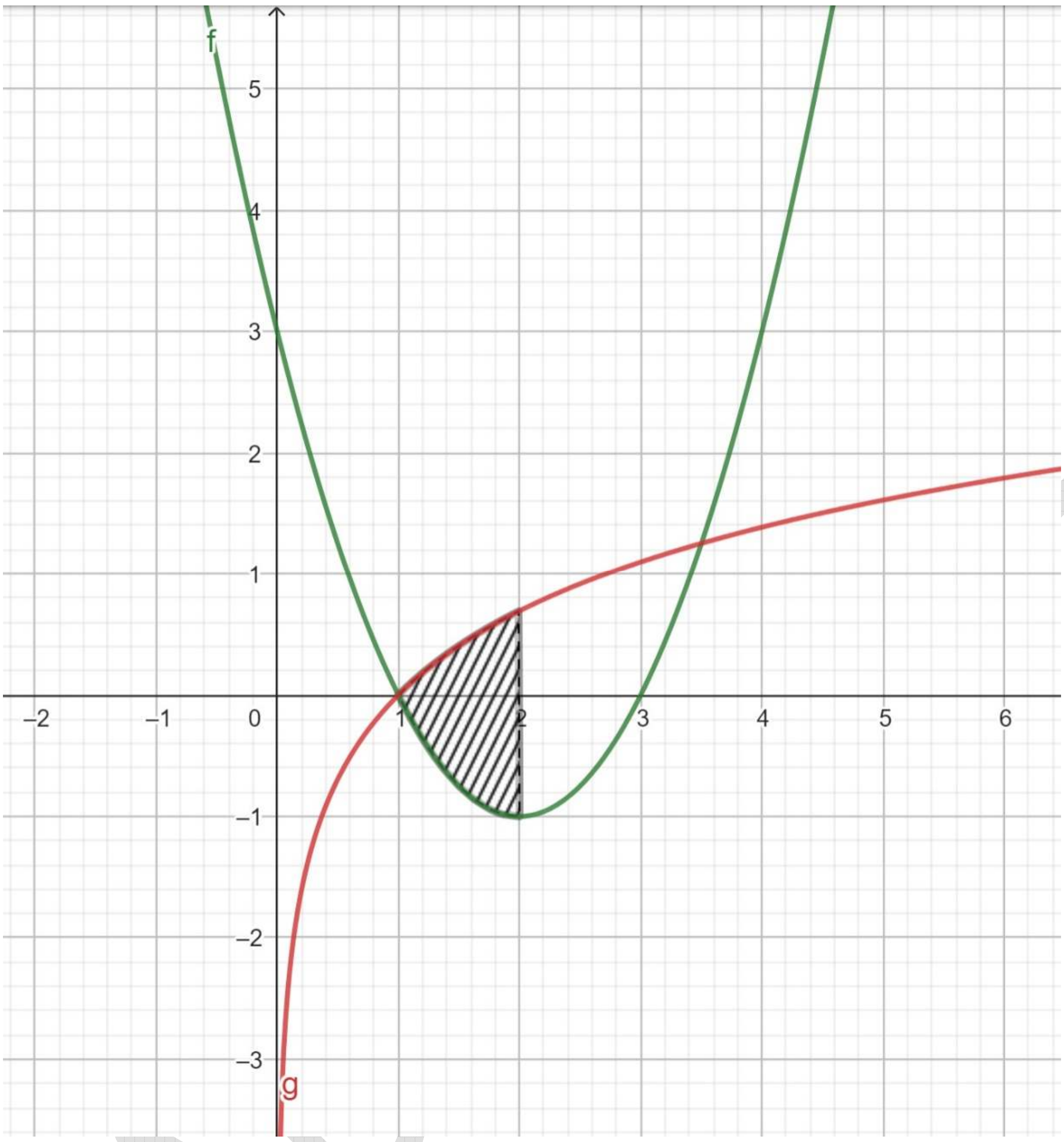
D'après $(C_f)$ et $(C_g)$ on remarque que $(C_g)$ est située au-dessus de $(C_f)$

Donc $A = \left(\int_1^2 (g(x) - f(x))\, dx\right) \times u.a$

$= \left(\int_1^2 (lnx - (x^2 - 4x + 3)\, dx\right) \times u.a$

$= \left(2ln2 - 1 - \left(\frac{-2}{3}\right)\right) u.a$

$A = \left(2ln2 - \frac{1}{3}\right) u.a$


f
g
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6